

Reinhard OLDENBURG, Augsburg, Diana HENZ, Mainz

## Neues zum Umkehrfehler in der elementaren Algebra

Der Umkehrfehler in der elementaren Algebra wird seit über 30 Jahren studiert. Studien zeigen, dass ein konstant hoher Anteil an Lernenden in allen Altersstufen diesem Fehler beim Aufstellen von Gleichungen begeht. Zur Erklärung wurden einige Theorien entwickelt. Wir vermuten aufgrund von Testauswertung vor allem eine Verwechslung von Attributen und Operationen als Ursache.

### 1. Der Umkehrfehler

Bei der Formalisierung von Beziehungen zwischen Quantitäten durch algebraische Gleichungen kommt es zu charakteristischen Fehlern: Operationen und Umkehroperationen werden vertauscht notiert. Beispiele:

Der Rhein ist  $r$  Kilometer lang, die Elbe  $e$  Kilometer. Der Rhein ist 200km länger als die Elbe.  
In einem Zoo gibt es  $t$  Tiger und  $p$  Pumas. Es gibt doppelt so viele Tiger wie Pumas.

Die fehlerhaften Antworten  $r+200=e$  bzw.  $2t=p$  werden als additiver und multiplikativer Umkehrfehler bezeichnet. Dabei kann die Situation textuell, bildlich oder handelnd gegeben sein. Dieser Fehlertyp ist in der Literatur gut untersucht, Malle (1993) gibt einen umfassenden Überblick. Wichtige Resultate der Diskussion (soweit bereits in Malle zitiert verweisen wir auf die dortige Darstellung, nicht auf die Originalarbeiten):

- Der Fehler ist stabil und resistent gegen Instruktion (Malle S. 93).
- Die Benennung der Variablen (z.B.  $x, y$  statt  $e, r$ ) hat nach einigen Studien keinen relevanten Einfluss (Malle. S. 94), nach (Sims-Knight & Kaput 1983) allerdings schon.
- Das schriftliche Formulieren einer graphisch gegebenen Aussage (Bal-kendiagramme für beide Größen) in eigenen Worten und nachfolgender Algebraisierung reduziert den Fehler gegenüber einer direkten Übersetzung Graphik→Gleichung (MacGregor 1990).

Eine naheliegende Erklärung (so naheliegend, dass sie erfahrungsgemäß von Studenten schnell und von erfahrenen LehrerInnen nach wenigen Sekunden als Vermutung geäußert wird) ist, dass stattfindet, was Herscovics (1989) eine syntaktische Übersetzung nennt. Beispiel: „Doppelt so viele“ →  $2*$ , Tiger →  $t$ , wie →  $=$ , Pumas →  $p$ . So entsteht die falsche Gleichung  $2*t=p$ . Es wurde aber festgestellt, dass der Fehler auch auftritt bei bildlicher Darstellung der Situation (Malle S. 95). MacGregor (1990) hat festgestellt, dass es keinen signifikanten Vorteil gibt, wenn der in ihrer Untersuchung

aufgestellte Satz (s.o.) sich syntaktisch in eine korrekte Formel übersetzen lässt. Christianson et al. (2012) finden ebenfalls keinen starken Einfluss der Wortstellung. Weiter stellen sie fest, dass Information, die bei der Konstruktion eines Situationsmodells hilft, nämlich die Angabe, welche Zahl der größer ist, nicht hilfreich ist. Dagegen konstatieren sie einen sehr starken Übungseffekt.

Ein anderer wichtiger Erklärungsversuch ist der von Davis (vgl. Malle. S. 96), nach dem der Fehler auf einer Verwechslung von Einheiten- und Zahl-schema beruht: Eine Größe  $x$  die als  $x=ze$  als Produkt von Maßzahl  $z$  und Einheit  $e$  dargestellt wird, ist invariant, wenn sich  $z,e$  kontravariant resp. kovariant transformieren. Diese Erklärung erstreckt sich allerdings nicht auf den additiven Umkehrfehler.

Pawley (2004) zeigt, dass Instruktion mit ausgearbeiteten Lösungsbeispielen den Umkehrfehler reduzieren kann und schließt auf eine hohe cognitive load als Ursache.

Malle berichtet auch, dass auch Schüler, die Umkehrfehler machen, korrekte Zahlenbeispiele angeben können. Der Fehler passiert also offensichtlich auf der symbolisch-semantischen Ebene. MacGregor&Stacey (1993) weisen alle Erklärungsversuche zurück und behaupten, der Fehler läge darin, dass andere kognitive Strukturen als Repräsentationen von Gleichheit verantwortlich seien. Sie diskutieren mögliche Darstellungen von Vergleichen. Dies ist interessant, scheint aber auch zu vage.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die aktuelle Verbreitung des Umkehrfehlers erheben und einige der international gemachten Befunde vor dem Hintergrund des hiesigen Unterrichts zu prüfen.

## **2. Die Studie**

Es wurden 118 bayerischen Real- und Gymnasialschülern der achten bis zehnten Jahrgangsstufe Fragebogentests in mehreren Varianten vorgelegt. Jeder Test enthielt 8 Items, von denen je die Hälfte additive und multiplikative Beziehungen betrafen. Die Auswahl der Klassen erfolgte nach Verfügbarkeit, die Aussagekraft der Ergebnisse ist also nicht repräsentativ, sondern soll der Exploration dienen.

Um die Rolle der syntaktischen Übersetzung zu prüfen, wurden zwei resp. drei Items so geschrieben, dass eine syntaktische Übersetzung den Umkehrfehler begünstigt, erschwert oder neutral dazu ist.

Die Studie prüft, ob zwei Arten von Vorüberlegungen hilfreich sind: 1) Vorab eine Ungleichung aufschreiben (also etwa  $r > e$ ). 2) Vorab Zahlenbeispiele angeben (also etwa  $r=1200$ ,  $e=1000$ ). Dazu wurden die Fragebögen in zwei Varianten verwendet. In jeder Fassung wurden 4 Items ohne Vorüberlegung und 4 Items mit einer solchen Vorabfrage gestaltet, und die Rolle der 4 Items wurde zwischen den Varianten getauscht.

### 3. Ergebnisse

Die Rate der Umkehrfehler lag je nach Item bei 21% bis 28% - also auf dem zu erwartenden Niveau. Bei früheren Untersuchungen (Oldenburg 2009) zeigten Oberstufenschüler ebenfalls etwa 20% Umkehrfehler. Ein Übungseffekt wie in Christianson et al. (2012) konnte nicht annähernd gesehen werden, auch wenn die Zahl der Items das erwarten ließe.

Die Quote der Umkehrfehler war in allen drei Gruppen der unterschiedlichen Anwendbarkeit der syntaktischen Übersetzung fast exakt gleich. Die international festgestellte Unabhängigkeit von der Wortstellung kann also bestätigt werden.

Das Aufstellen einer Ungleichung vorab führt insgesamt nur zu leicht mehr richtigen Lösungen, aber dies ist nicht signifikant ( $p=0.078$  nach Wilcoxon-Test) – dies ist verträglich mit dem o.g. Resultat von Christianson et al. (2012). Die Gruppe der Schüler aber, die die Ungleichung korrekt hinschreibt, löst signifikant besser ( $p=0.022$ ). Allerdings werden eher andere Fehler behoben, die Zahl der Umkehrfehler ist nahezu unberührt. Es gibt sogar eine Aufgabe, bei der es eine signifikante Erhöhung des Umkehrfehlers durch Aufschreiben der Ungleichung gibt.

Die Angabe von Zahlenbeispielen wurde nur von einer zweiten Probandengruppe durchgeführt ( $n=42$ ). Die Quote der Umkehrfehler war auffallend gering (11%) und das Aufschreiben von Zahlenbeispielen wirkte positiv, wenn auch nicht signifikant.

Einer weiteren Gruppe (Gymnasium,  $n=29$ ) wurden die Items in multiple choice-Format vorgelegt, darunter mehrere richtige, etwa  $t=2p$ ,  $t/2=p$  und  $3t=6p$ . Die Nichtstandardformen wurden dabei über alle Items durchweg schlechter erkannt – im Widerspruch zu Fischer et al. (2011).

### 4. Interpretation und Konsequenzen

Die Studie bestätigt, dass der Umkehrfehler ein ungelöstes Problem des Algebraunterrichts ist, wie auch Christianson et al. (2012) konstatieren. Im Laufe der Arbeit an den Tests hat sich bei uns folgende Hypothese ergeben:

Attributs-Operations-Verwechslungshypothese: Der Umkehrfehler beruht (teilweise) auf einer Verwechslung von Operationen und Attributen.

Symbole der Algebra bedeuten teilweise Operationen (etwa der Strich in  $\bar{z}$ ), teilweise Attribute (so ist etwa  $\vec{x}$  nicht der aus  $x$  gebildete Vektor, sondern der Pfeil ist das Attribut „dies ist ein Vektor“). Ein Term wie  $x + 5$  kann auf (mehr als, aber die anderen sind hier nicht relevant) zwei Arten gedeutet werden: 1) Die Zahl, die 5 mehr ist als  $x$  2)  $x$  ist fünf mehr als eine Vergleichsgröße. Diese zweite Attributinterpretation der Operation mag exotisch wirken, sie wird aber durch Aufgaben der Art „Schreibe als Term:  $x$  um 5 vermehrt“ tendenziell begünstigt. Es scheint plausibel, dass viele Schüler  $r+200=e$  schreiben, weil sie sagen wollen, dass der Rhein 200km Extralänge im Vergleich zur Elbe hat. Eine Schülerin schrieb sogar:  $r+200=e-200$ . Trotz aller Zurückhaltung die man bei der Interpretation von Einzelfällen üben sollte, kann man festhalten, dass diese Variante des Umkehrfehlers sich mit keiner der in der Literatur angegebenen Erklärungen verstehen lässt. Die Attributinterpretation präzisiert in gewissem Sinne die Aussage von MacGregor & Stacey (1993), wonach das Gleichheitszeichen nicht unbedingt als numerische Gleichheit verstanden wird, sondern als Zeichen für einen Vergleich anderer Art.

## Literatur

- Christianson, K. Et al. (2012): Practice Makes (Nearly) Perfect: Solving 'Students-and-Professors'-Type Algebra Word Problems. *Appl. Cognit. Psychol.* 26: 810-822.
- Fisher, K. J et al. (2011): Following the standard form: Effects of equation format on algebraic modeling. *Mem. Cogn.* 39: 502-515.
- Herscovics, N. (1989): Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 60-86).
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Wiesbaden: Vieweg.
- MacGregor, M. (1990): Writing in Natural Language helps students construct algebraic equations. *Math. Ed. Research Journal*. Vol 2., No. 2.
- MacGregor, M., Stacey, K. (1993): Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Math. Ed.* Vol 24, No. 3, 217-232.
- Oldenburg, R. (2009): .Structure of algebraic competencies. CERME Proceedings 2009.
- Pawley, D. M. (2004): A Cognitive Load Approach to Instruction in Formation of Algebraic Equations- PhD Thesis. Sydney.
- Sims-Knight, J., & Kaput, J. J. (1983). Exploring difficulties in transformations between natural language and image-based representations and abstract symbol systems of mathematics. In D. Rogers & J. Sloboda (Eds.), *The acquisition of symbolic skills* (pp. 561-569). New York: Plenum.